第４講　図形と方程式

1 ［1］ 2 点 A(4, 0), B(0, 2) を考える．線分 AB 上の点 P と x 軸上の点 Q が ∠OPB＝∠QPA (O：原点) を満たしている．直線 OP の傾きを m として，Q の x 座標を m を用いて表せ．

［2］ a を正の定数とする．y 軸上に定点 A(0, a)，および x 軸上に動点 P(p, 0) をとる．P を通る AP の垂線が y 軸と交わる点を Q とし，P に関する Q の対称点を R とする．点 P が x 軸上を動くとき，R はどんな曲線をえがくか．その方程式を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　次の問いに答えよ．

(1)　中心の座標が $(a,\ b)$ で半径が r である円周上の点 $(x_1,\ y_1)$ において，この円に引いた接線の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

として表されることを証明せよ．

(2)　円 $x^2+y^2=4$ 上の同一直径上にない異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ において，この円に引いた 2 接線の交点を R とする．点 P，Q を結ぶ直線の方程式を $Ax+By=1$ と表したとき点 R の座標を A，B を用いて表せ．

(3)　直線 $Ax+By=1$ が円 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ に接しながら動くとき，点 R はどんな曲線上にあるか．その方程式を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$1<p\leqq 3$ のとき，すべての実数 x に対して $\sin^2 x+p\sin x+q\geqq 0$ が成り立つとする．このとき，点 $(p,\ q)$ のえがく範囲を図示せよ．さらに p，q がこの条件を満たすとき，$\dfrac{q+2}{p-1}$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

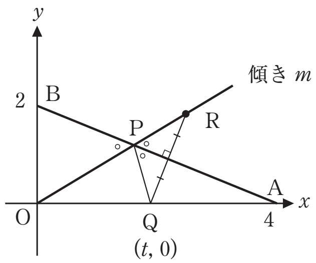
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　図形と方程式

1 [1] 2点 A(4, 0)，B(0, 2) を考える．線分 AB 上の点 P と x 軸上の点 Q が ∠OPB＝∠QPA（O：原点）を満たしている．直線 OP の傾きを m として，Q の x 座標を m を用いて表せ．



Q(t, 0) とする．AB に関して Q を対称に移動した点を R とすると，右図より R は直線 OP 上にある．
よって R(s, ms) とおける．

QR の中点が直線 AB：$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$　の上にあるので

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{t+s}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{ms}{2}=1$$

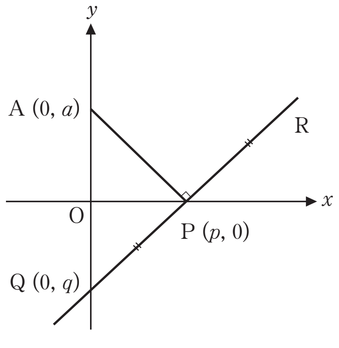
よって　$t+(2m+1)s=8$　……①

また，QR⊥AB より　$\dfrac{ms}{s-t}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

よって　$2t+(m-2)s=0$　……②

①，②より　$s=\dfrac{16}{3m+4}$，$t=\dfrac{16-8m}{3m+4}$　　ゆえに　$\mathbf{Q\left(\dfrac{-8m+16}{3m+4},\ 0\right)}$

1 [2] a を正の定数とする．y 軸上に定点 A(0, a)，および x 軸上に動点 P(p, 0) をとる．P を通る AP の垂線が y 軸と交わる点を Q とし，P に関する Q の対称点を R とする．点 P が x 軸上を動くとき，R はどんな曲線をえがくか．その方程式を求めよ．



Q(0, q) とすると，$q\leqq 0$ である．
P は線分 QR の中点より　R($2p$, $-q$)　とおける．

また，AP⊥QP より　$p\neq 0$ のとき　$\dfrac{-a}{p}\cdot\dfrac{-q}{p}=-1$

つまり　$q=\dfrac{-p^2}{a}$　これは $p=0$ でも成り立つ．

よって　$R\left(2p,\ \dfrac{p^2}{a}\right)$

ここで　$X=2p$，$Y=\dfrac{p^2}{a}$ とおくと　$p=\dfrac{X}{2}$　より

$$Y=\frac{1}{4a}X^2$$

ゆえに，求める軌跡は放物線で，その方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{4a}x^2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 次の問いに答えよ．

(1) 中心の座標が $(a,\ b)$ で半径が r である円周上の点 $(x_1,\ y_1)$ において，この円に引いた接線の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

として表されることを証明せよ．

(2) 円 $x^2+y^2=4$ 上の同一直径上にない異なる2点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ において，この円に引いた2接線の交点をRとする．点P，Qを結ぶ直線の方程式を $Ax+By=1$ と表したとき点Rの座標を A，B を用いて表せ．

(3) 直線 $Ax+By=1$ が円 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ に接しながら動くとき，点Rはどんな曲線上にあるか．その方程式を求めよ．

(1) 題意の接線上にある点を $(X,\ Y)$ とする．

$(x_1,\ y_1)$ が円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点より $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$ ……①

また，ベクトル $(x_1-a,\ y_1-b)\perp(X-x_1,\ Y-y_1)$ より

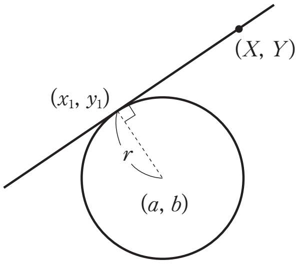
$$(x_1-a)(X-x_1)+(y_1-b)(Y-y_1)=0$$

$$(x_1-a)\{(X-a)-(x_1-a)\}+(y_1-b)\{(Y-b)-(y_1-b)\}=0$$

$$(x_1-a)(X-a)+(y_1-b)(Y-b)=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$$

①より $(x_1-a)(X-a)+(y_1-b)(Y-b)=r^2$

これが $(X,\ Y)$ の満たす軌跡の方程式である．よって示された．



(2) $\mathrm{R}(s,\ t)$ とおく．

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ における接線はそれぞれ

$x_1x+y_1y=4$，$x_2x+y_2y=4$ と表せる．

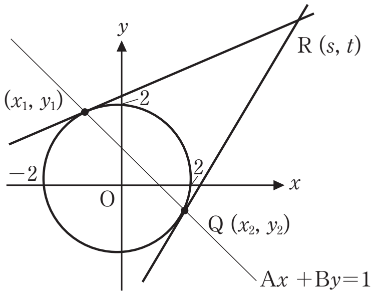
これらがともに $\mathrm{R}(s,\ t)$ を通るので

$x_1s+y_1t=4$，$x_2s+y_2t=4$

つまり $sx_1+ty_1=4$，$sx_2+ty_2=4$

これらは，$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ が

直線 $sx+ty=4$ 上にあることを示している．



よって，直線PQの方程式は $\dfrac{s}{4}x+\dfrac{t}{4}y=1$ と表される．これを $Ax+By=1$ と比較して

$A=\dfrac{s}{4}$，$B=\dfrac{t}{4}$ つまり $s=4A$，$t=4B$ ゆえに **$\mathbf{R}\,(4A,\ 4B)$**

(3) 直線 $Ax+By=1$ すなわち $sx+ty=4$ が $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ に接するとき

この円の中心 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と $sx+ty-4=0$ の距離が円の半径 $\dfrac{1}{2}$ と等しい．

よって $\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}t-4\right|}{\sqrt{s^2+t^2}}=\dfrac{1}{2}$ $\quad 2\left|\dfrac{1}{2}t-4\right|=\sqrt{s^2+t^2}$ $\quad |t-8|=\sqrt{s^2+t^2}$

$t^2-16t+64=s^2+t^2$ ゆえに $t=-\dfrac{1}{16}s^2+4$

したがって，点 $\mathrm{R}(s,\ t)$ は放物線 $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{16}x^2+4}$ 上にある．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$1<p\leqq 3$ のとき，すべての実数 x に対して $\sin^2 x+p\sin x+q\geqq 0$ が成り立つとする．このとき，点 $(p,\ q)$ のえがく範囲を図示せよ．さらに p，q がこの条件を満たすとき，$\dfrac{q+2}{p-1}$ の最小値を求めよ．

$1<p\leqq 3$ のとき，すべての実数 x で　$\sin^2 x+p\sin x+q\geqq 0$　が成り立つ．

$\sin x=t$ とおくと，$t^2+pt+q\geqq 0$　が　$-1\leqq t\leqq 1$ であるすべての t で成り立つ．

$$f(t)=t^2+pt+q=\left(t+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q \quad \text{とおくと，グラフの軸は} \quad t=-\frac{p}{2}$$

$1<p\leqq 3$ より　$-3\leqq -p<-1$　　よって　$-\dfrac{3}{2}\leqq$ 軸 $<-\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{p}{2}<-1$　つまり　$2<p\leqq 3$　のとき　$f(t)$ の最小値は　$f(-1)=1-p+q$

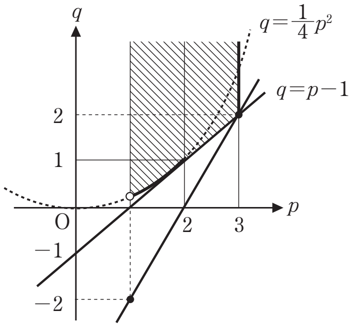
よって　$f(-1)\geqq 0$　より　$q\geqq p-1$

$1<p\leqq 2$ のとき　$f(t)$ の最小値は　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=-\dfrac{p^2}{4}+q$

よって　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right)\geqq 0$　より　$q\geqq \dfrac{p^2}{4}$

よって点 $(p,\ q)$ の描く軌跡は右図斜線部分

(境界は $x=1$ 上の点を除き含む)



$\dfrac{q+2}{p-1}=k$ とおくと，$q=k(p-1)-2$

これは点 $(1,\ -2)$ を通る直線である．これが図の斜線部の領域を通るときの傾き k の最小値を求める．

図より，それはこの直線が点 $(3,\ 2)$ を通るときである．

ゆえに　$k=\dfrac{2+2}{3-1}=\mathbf{2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2}, t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる２本の接線を引き，２つの接点を通る直線を l とする．

(1)　直線 l の方程式を t を用いて表せ．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき, t によらず l が通る点がある．この点の座標を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　実数 a，b に対して，$f(x)=(a+8b)x^2-8bx+b$ とする．「$0 \leqq x \leqq 1$ ならば $f(x)>0$」が成り立つ点 $(a,\ b)$ の範囲を求め，ab 平面上に図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2}, t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる２本の接線を引き，２つの接点を通る直線を l とする．

(1)　直線 l の方程式を t を用いて表せ．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず l が通る点がある．この点の座標を求めよ．

解答例

明らかに「円外の点」であることがわかる．

(1)　点 $\left(\frac{1}{2}, t\right)$ $(t>1)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた２本の接線と円との接点を (x_1, y_1)，(x_2, y_2) とすると，２本の接線は

$x_1x+y_1y=1$，$x_2x+y_2y=1$　と表せる．

これらがともに点 $\left(\frac{1}{2}, t\right)$ を通るので

$x_1\cdot\frac{1}{2}+y_1\cdot t=1$，$x_2\cdot\frac{1}{2}+y_2\cdot t=1$

$\frac{1}{2}x_1+ty_1=1$，$\frac{1}{2}x_2+ty_2=1$

「極線」をモチーフとするこの問題を通じ，この考え方を定着させよう．

この２式は，直線 $\frac{1}{2}x+ty=1$　が点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を通ることを示している．

よって，直線 l の方程式は　$\boldsymbol{\frac{1}{2}x+ty=1}$　$(x+2ty-2=0)$

(2)　$x+2ty-2=0$　つまり　$(x-2)+2yt=0$

これが任意の実数 $t(t>1)$ で成り立つための条件は　$x-2=0$　かつ　$2y=0$

つまり　$x=2$　かつ　$y=0$

よって，t によらず l は **定点 (2, 0)** を通る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 **応用** 実数 a, b に対して，$f(x)=(a+8b)x^2-8bx+b$ とする．「$0 \leqq x \leqq 1$　ならば $f(x)>0$」が成り立つ点 (a, b) の範囲を求め，ab 平面上に図示せよ．

解答例

（i）$a+8b=0$　つまり　$b=-\dfrac{1}{8}a$ のとき

$$f(x)=-8bx+b$$

$b=0$ のとき　$f(x)=0$ となり $f(x)>0$ を満たさない．

$b<0$ のとき　$f(x)$ は右上がりの直線．

よって　$f(0)>0$　であればよい．

ところが　$f(0)=b<0$　より不適．

$b>0$ のとき　$f(x)$ は右下がりの直線．よって　$f(1)>0$　であればよい．

ところが　$f(1)=-7b<0$　より不適．

※ $f(x)=b(-8x+1)$ より $f\left(\dfrac{1}{8}\right)=0$ となり $f(x)>0$ を満たさず不適となる．これに気づけば b による場合分けをせずとも済む．

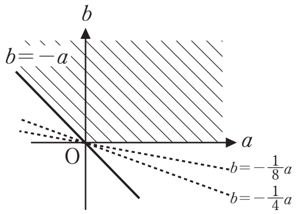
（ii）$a+8b \neq 0$ のとき

$$f(x)=(a+8b)x^2-8bx+b=(a+8b)\left(x-\frac{4b}{a+8b}\right)^2-\frac{16b^2}{a+8b}+b$$

$f(x)$ のグラフの軸は $x=\dfrac{4b}{a+8b}$　　頂点の y 座標は $\dfrac{b(a-8b)}{a+8b}$

また，$f(0)=b>0$　かつ　$f(1)=a+b>0$　……① であることが必要．

図示すると，右図斜線部分（境界含まず）．



このとき　$a+8b<0$　つまり　$b<-\dfrac{1}{8}a$ は成り立たず不適．

よって　$a+8b>0$　（これは①の条件のもとで必ず成り立つ）

つまり，$y=f(x)$ が下に凸のときを考える．

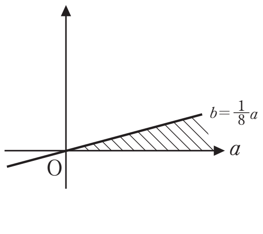
$0<\dfrac{4b}{a+8b}<1$　つまり　$b>0$　かつ　$b>-\dfrac{1}{4}a$　は①のもとで必ず成り立つので，

$f(x)$ の軸は $0<x<1$ にある．

よって，求める条件は　$\dfrac{b(a-8b)}{a+8b}>0$　$a-8b>0$　つまり　$b<\dfrac{1}{8}a$　である．

以上より，求める (a, b) の範囲は　$\boldsymbol{0<b<\dfrac{1}{8}a}$　である．

図示すると，右図斜線部分（境界含まず）．



※本来なら，下に凸の放物線の最小値は「軸を変域に含むときと含まないとき」で場合分けするのが基本であるが，文字条件を複雑に含む場合は，「端点の条件」を「必要条件」すなわち「必ず成り立たなければならない条件」として先に求めると「絞り込み」となって効果的である．それにより今回は「下に凸」かつ「軸は変域内」であるとわかる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。